CB-1.075

# SISTEMAS DE EQUAÇÕES NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: PROCEDIMENTOS ARITMÉTICOS COMO BASE PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Keila Tatiana Boni – Renata Karoline Fernandes – Angela Marta Pereira das D. Savioli
keilaboni@hotmail.com – renatakaroline08@hotmail.com – angelamarta@uel.br
Universidade Estadual de Londrina – Brasil

Núcleo temático: I. Ensino e aprendizagem da matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais.
Modalidade: CB
Nível educativo: Primário (6 a 11 anos)
Palavras chave: Educação Matemática. Pensamento Algébrico. Anos Iniciais.

**Resumo**

*Partindo do pressuposto de que a aritmética possui um caráter potencialmente algébrico, este trabalho apresenta resultados de uma investigação em que objetiva-se evidenciar indícios de pensamento algébrico de estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao resolverem um problema matemático envolvendo relações entre valores desconhecidos.*
*Os dados dessa pesquisa, de cunho qualitativo, consistem em trinta e cinco registros escritos, contendo resoluções para o problema proposto. Essas resoluções, analisadas de maneira interpretativa e descritiva, tendo como base referenciais que abordam sobre o pensamento algébrico e suas características, sobretudo em nível elementar, apontam resultados que permitem evidenciar procedimentos aritméticos utilizados de forma potencialmente algébrica, uma vez que podem servir como suporte à aprendizagem de procedimentos algébricos formais, devido ao estabelecimento de relações de dependência que alguns estudantes manifestaram e que pode ser comparado a método utilizado na resolução de sistemas de equações do primeiro grau.*

## Introdução

A aprendizagem a respeito de equações é fundamental para a resolução de problemas e, por esse motivo, na Educação Básica esse trabalho não pode ser desenvolvido apenas a partir de resolução de exercícios em que se valoriza principalmente a linguagem e os procedimentos algébricos, mas precisa ser desenvolvido tendo por objetivo o reconhecimento de relações a partir da resolução de problemas.

Nesse sentido, defendemos a possibilidade de iniciar o trabalho com equações mais cedo, a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental, objetivando auxiliar os estudantes dessa etapa escolar a desenvolver o *pensamento algébrico* a partir da compreensão do conceito de


ISBN 978-84-945722-3-4

igualdade, dos significados e das propriedades das operações, bem como a partir do estabelecimento de relações por meio de processos de contagem e de tentativa e erro (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Nesse trabalho serão apresentados resultados de uma investigação em que objetivou-se evidenciar indícios de pensamento algébrico de estudantes do 5º ano ao resolverem um problema matemático envolvendo relações entre valores desconhecidos.

**Fundamentação teórica**

O trabalho com equações é amplamente desenvolvido nos anos finais do Ensino Fundamental, em que observa-se a valorização de símbolos e procedimentos algébricos. Ponte, Branco e Matos (2009) relatam que o trabalho com equações pressupõe a familiarização de estudantes com novas terminologias e expressões algébricas, mas defendem que esse trabalho deve apoiar-se primeiro na compreensão da solução de uma equação e de equações equivalentes. Para isso, os estudantes precisam conhecer o significado e saber realizar corretamente o tratamento de operações e suas inversas o que, inicialmente, pode ser realizado pelo estudante por meio de procedimentos mais informais, tais como contagem e tentativa e erro.

Diante do exposto, defende-se a possibilidade de iniciar um trabalho envolvendo equações já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, propondo aos estudantes situações-problemas envolvendo relações entre quantidades desconhecidas que poderão ser solucionadas a partir de estratégias informais de resolução que embasarão, futuramente, uma abordagem mais formal (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Em concordância com essa defesa, Nobre, Amado e Ponte (2011, p. 257) afirmam que modos de representação informais, tais como os aritméticos, "constituem situações propícias para os alunos trabalharem no âmbito das relações de dependência entre variáveis e providenciam uma base consistente para uma representação mais formal" e, portanto, tais métodos antecipam procedimentos mais formais, que fazem uso de símbolos e procedimentos algébricos.

Essa visão sobre o ensino de Álgebra, em que se insere o trabalho sobre equações, é o que se encontra dentre as propostas para o desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Básica. Blanton e Kaput (2005), por exemplo, defendem que o pensamento algébrico


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

manifesta-se a partir de generalizações sobre relações matemáticas presentes nas argumentações de estudantes, que são expressas numa linguagem gradativamente mais formal.

Segundo esses autores, essas generalizações apresentam algumas características, tais como: exploração de propriedades das operações, exploração do sinal de igualdade como expressão de uma relação entre quantidades, tratamento algébrico do número, ou seja, utilização do número como incógnita, consideração de que símbolos iguais correspondem a mesmos valores e resolução de sentenças com números desconhecidos.

Conclui-se, portanto, que o desenvolvimento do pensamento algébrico vai muito além da capacidade de desenvolver expressões algébricas, mas contempla a capacidade de estabelecer relações matemáticas e utilizá-las para interpretar e resolver problemas matemáticos:

> […] aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Resumir a actividade algébrica à manipulação simbólica, equivale a reduzir a riqueza da Álgebra a apenas uma das suas facetas (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 10).

Em síntese, encontramos em Kaput (2008) que o pensamento algébrico assume três vertentes: álgebra como estudo das estruturas (aritmética generalizada); álgebra como estudo de funções e relações; e, álgebra como conjunto de linguagens para modelação. A primeira vertente tem como base o caráter potencialmente algébrico da aritmética, ou seja, a generalização sobre operações e suas propriedades, bem como o raciocínio acerca de relações numéricas. A segunda vertente diz respeito à generalização por meio da ideia de função, em que descreve-se a variação de instancias numa parte do domínio. Inclui-se nessa segunda vertente, por exemplo, a previsão de resultados desconhecidos a partir de dados conhecidos. Por fim, a terceira vertente, diz respeito à utilizar representações algébricas diversas para interpretar e resolver problemas (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Na presente pesquisa, embasado nos referenciais apresentados, expõe-se a possibilidade e a necessidade de iniciar o trabalho com álgebra nos anos iniciais, tendo como foco o desenvolvimento do pensamento algébrico de estudantes. Com esse intuito, investigou-se indícios de pensamento algébrico de estudantes do 5º ano ao resolverem um problema matemático envolvendo relações entre valores desconhecidos, sendo esses indícios


ISBN 978-84-945722-3-4

considerados de acordo com algumas das características de pensamento algébrico apresentadas anteriormente, sobretudo, às relacionadas à aritmética generalizada e ao estabelecimento de relações.

**Procedimentos metodológicos**

Os dados deste trabalho, de cunho qualitativo, foram obtidos em uma escola municipal de Apucarana – PR participante do projeto do Programa Observatório da Educação (CAPES) em que as autoras eram integrantes.

Os sujeitos dessa pesquisa foram 35 estudantes do 5º ano, os quais, neste trabalho, serão denominados como E1, E2, ..., E35 para preservar suas identidades. Aos estudantes, foi proposto um problema envolvendo quantidades desconhecidas, relacionando duas variáveis. Vale destacar que não houve intervenção dos pesquisadores em nenhum momento, inclusive com leitura do problema proposto.

Em duas lojas foram colocados na mostra os mesmos artigos mas em quantidades e disposições diferentes. A mostra A tem um valor total de R$ 115,75 e a mostra B tem um valor total de R$ 182,65.


Qual o preço de cada um dos artigos? Explique como pensou.

***Figura 1 – Questão proposta aos estudantes participantes da pesquisa (adaptada de Ponte, Branco e Matos, 2009)***

Esse problema pode ser resolvido a partir do desenvolvimento de um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, conteúdo que não é previsto e abordado nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Como os participantes dessa pesquisa desconhecem esse método de resolução, investigou-se quais foram as suas estratégias de resolução e nestas, evidenciamos indícios de manifestações de pensamento algébrico.


ISBN 978-84-945722-3-4

**Procedimentos analíticos**

Os registros de resolução dos estudantes foram submetidos à análise interpretativa e descritiva.

Num primeiro momento, os registros foram organizados de acordo com as resoluções corretas daqueles com resoluções incorretas. No total, dentre os trinta e cinco registros, identificamos sete que apresentaram respostas corretas para o problema proposto e vinte e oito, apresentaram respostas erradas. Nenhum registro foi entregue apresentando nenhuma resolução.

Dentre os erros, vinte e dois estão relacionados à intepretação do enunciado do problema:

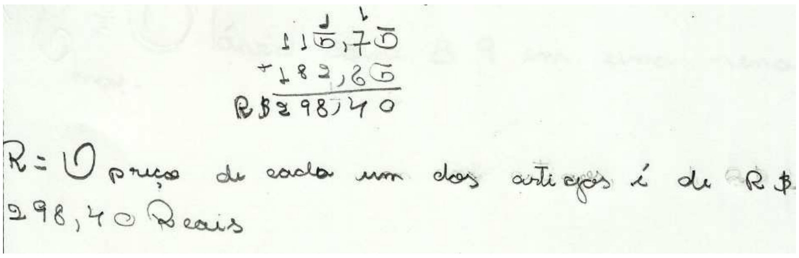


*Figura 2 – Resolução do estudante E13*

Conforme exemplificado na figura anterior, os vinte e dois estudantes apresentaram o mesmo erro relacionado à interpretação do enunciado do problema: não consideraram artigos diferentes (tênis e relógio) e quantidades diferentes desses artigos em cada mostra, relacionando tais quantidades aos preços apresentados, realizando, simplesmente, a adição desses preços e apresentando esse resultado como sendo o valor referente a cada artigo.

Dentre os demais seis registros de resolução errada, consideramos que os estudantes compreenderam que o problema solicita o valor de cada artigo, porém, consideraram que cada mostra apresenta valores iguais para os diferentes artigos. Além disso, não estabeleceram relação entre artigos iguais entre as duas mostras (A e B), não reconhecendo que várias ocorrências do mesmo artigo (incógnita), ainda que em mostras (equações) diferentes, representam o mesmo número:


ISBN 978-84-945722-3-4

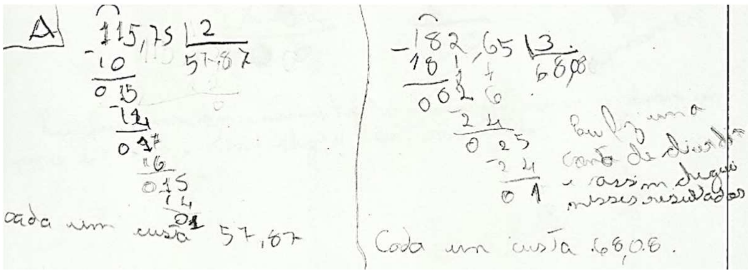


*Figura 3 – Resolução do estudante E1*

Nos sete registros que apresentaram resoluções corretas, evidenciamos a mesma estratégia de resolução:

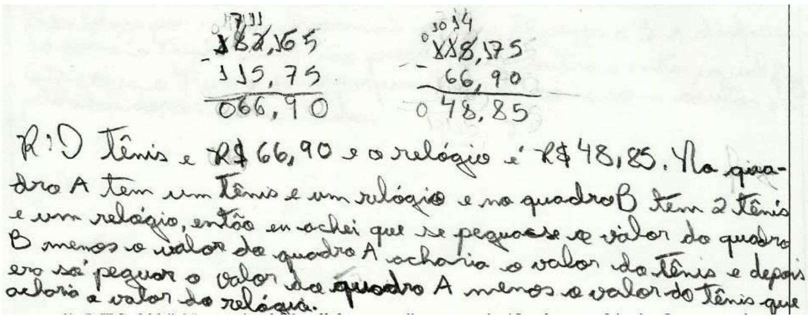


*Figura 4 – Resolução do estudante E20*

A estratégia apresentada por esses sete estudantes foi de subtrair o valor da mostra A do valor da mostra B, manifestando reconhecer que *símbolos iguais correspondem a mesmos valores* (BLANTON; KAPUT, 2005) e que *a partir de resultados conhecidos é possível obter resultados desconhecidos* (KAPUT, 2008).

De acordo com a explicação de E20, concluímos que o estudante estabeleceu relação entre os artigos iguais nas duas mostras, inclusive a relação entre os preços destes artigos, conforme ilustramos no seguinte esquema:


ISBN 978-84-945722-3-4


***Figura 5 – Esquema da estratégia de resolução apresentada pelos sete alunos que apresentaram resposta correta***

Por meio do esquema podemos compreender que a estratégia de resolução apresentada pelos sete alunos que apresentaram a resposta correta, consistiu em reconhecer que o valor de um tênis mais um relógio na mostra B corresponde ao mesmo valor total apresentado na mostra A e, portanto, subtraindo esse valor do preço total apresentado na mostra B resultaria exatamente no valor de um único tênis. Conhecendo esse valor, os estudantes retornaram à mostra A, subtraindo o valor do tênis do valor total apresentado em A para obter o valor de um único relógio.

Tal estratégia de resolução aritmética está relacionada ao procedimento algébrico:

$$\begin{cases} t + r = 115{,}75 \\ 2t + r = 182{,}65 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t + r = 115,75} \\ t + \boldsymbol{t + r} = 182{,}65 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t + r = 115,75} \\ t + \boldsymbol{115,75} = 182{,}65 \end{cases}$$

$$t = 182{,}65 - 115{,}75$$
$$t = 66{,}90$$

Como $t + r = 115{,}75$, considerando $t = 66{,}90$, temos que $r = 48{,}85$.

Assim, verificamos que a estratégia manifestada pelos sete estudantes, ainda que pautadas em procedimentos aritméticos, apresentam potencialidade para embasar um trabalho futuro com vistas a desenvolver problemas envolvendo sistemas de equações por procedimentos mais complexos, recorrendo a simbolismos e procedimentos algébricos na resolução.

**Considerações finais**


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A partir da proposta de um problema envolvendo quantidades desconhecidas, relacionando duas variáveis, investigou-se em resoluções apresentadas por trinta e cinco estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal, indícios de pensamento algébrico.

Dentre as resoluções apresentadas, vinte e oito estavam incorretas, sobretudo, devido a dificuldades relacionadas à interpretação do enunciado do problema matemático proposto. As demais sete resoluções apresentadas estavam corretas e apresentaram a mesma estratégia de resolução. A estratégia utilizada pode ser considerada como aritmética, contudo, considerando a abordagem teórica adotada, inferimos que os procedimentos aritméticos apresentados podem ser avaliados como potencialmente algébricos, uma vez que tais procedimentos podem servir como suporte à aprendizagem de outros mais formais, representados em linguagem simbólica e desenvolvidos de acordo com regras e métodos algébricos.

Ainda, partindo do pressuposto de que muitas das dificuldades dos alunos em aprendizagem de resolução de sistemas de equações estão atrelados aos erros que cometem no tratamento de expressões algébricas, devido à má compreensão de tais expressões, consideramos que o desenvolvimento desse trabalho mais cedo, nos anos iniciais, tendo como foco o estabelecimento de relações entre equações e fazendo uso de procedimentos aritméticos, contribui para minimizar dificuldades de aprendizagem mais tarde.

Destacamos, ainda, a atribuição da resolução de problemas para o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Ponderamos que o problema que propusemos, em conjunto com a representação pictórica da situação, auxiliou os estudantes a estabelecerem relações de dependência e, assim, recorrer a uma estratégia aritmética de resolução que pudemos comparar com a ideia de substituição num sistema de equações envolvendo duas incógnitas e duas equações.

## Referências bibliográficas

Blanton, M. L.; Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. Journal of Research in Mathematics Education, v. 36, n.5, p. 412-446.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.


ISBN 978-84-945722-3-4

Nobre, S.; Amado, N.; Ponte, J. P. (2011). Representações na aprendizagem de sistemas de equações. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática, 239-259.

Ponte, J. P. da; Branco, N.; Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação.


ISBN 978-84-945722-3-4